HOLOSMOS

Formalisme et réalisme

12 août 2019

Table des matières

Cela ne devrait pas vous étonner si je dis que les mathématiques sont une science formelle. D'ailleurs, en parlant mathématiques, vous penserez certainement à des formules longues et compliquées, comme celle-ci (il s'agit de l'équation des géodésiques) :

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0.$$

Mais où est donc la réalité des objets mathématiques ? Comment existent-ils ?

Rassurez-vous, cet article ne contiendra que peu de formules, où toutes les significations seront introduites pour que la lecture soit facile, même pour un non-initié.

> *i* Cet article est un peu particulier. Bien que fondé sur des article de recherche récents et sur du contenu mathématique, je laisse paraître de nombreuses réactions personnelles qui n'engagent que moi. Ces apports (que certains qualifient de subjectifs) peuvent, et j'encourage à, être soumis au débat dans le but de travailler sur les questions posées par le sujet présenté. Lorsque le format de *tribunes libres* sera disponible, cet article y sera migré.

1. Le formalisme des nombres complexes

On introduit très souvent l'existence des nombres complexes comme étant solutions d'un problème insoluble autrement. On lit par exemple dans le tuto sur la saga des nombres de Looping

> ! Cependant, avec les réels, une autre opération s'est avérée impossible : la racine carrée de -1 n'existe pas.

> Alors, que fait-on quand une opération est impossible ? On invente un autre type de nombre, pardi !

Une question très légitime se pose : a-t-on le droit de procéder ainsi ?

Pour répondre à cette interrogation, je vous propose de lire un précédent article sur les définitions dont je suis également l'auteur. On peut notamment y lire que l'on devrait accompagner chaque définition, d'une preuve de cohérence. En d'autres termes, oui, on a le droit de définir i par la relation $i^2 = -1$, **à condition** que l'on puisse aussi montrer que les résultats que l'on obtient n'entrent pas en contradiction.

Or, cela semble bien compliqué de montrer la non-contradiction. C'est pour cela que les nombres complexes ont d'autres approches mathématiques.

L'une d'entre elles est la suivante, que je vais vous expliquer brièvement. Cela permettra, au passage, à certains de pouvoir prendre connaissance des nombres complexes s'ils ne leur sont pas familiers.

1.1. Une organisation mathématique des nombres complexes

Par la suite, on utilisera exclusivement cette approche. On dira qu'un *nombre complexe*, c'est la donnée de deux nombres réels ordonnés (il y en a un premier et un second).

Par exemple, un nombre complexe z est la donnée de deux nombres réels, disons a et b. On notera cela $z = a + ib$.

Ici, il est important de noter que i n'a d'autre utilité que de signifier que a est le premier nombre réel et b le second. On dira aussi que a est la *partie réelle* de z et b la *partie imaginaire*.

Rien de bien compliqué jusqu'ici, on définit les nombres complexes comme des **mots** $a + ib$: la première lettre désigne le premier nombre réel (la partie réelle), et la dernière lettre désigne le second nombre réel (la partie imaginaire).

Maintenant on va donner une structure algébrique aux nombres complexes. On va :

— définir les opérations de conjugaison, d'addition, soustraction, multiplication et division sur les nombres complexes ;
— montrer qu'un nombre réel s'identifie naturellement à un nombre complexe très particulier.

1.1.1. Opérations algébriques

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On commence par définir son *conjugué*, il s'agit du nombre $z' = a' + ib'$ où $a' = a$ et $b' = -b$. En d'autres termes, on pourrait écrire $z' = a - ib$. On notera par convention $\bar{z}$ pour désigner le conjugué de z.

Cette façon d'écrire les nombres complexes est un peu différente (puisque par exemple, ici, on a un $-$ au lieu d'un $+$). Mais je vais continuer de l'utiliser. Comprenez seulement qu'on a toujours le mot $A + iB$ mais que A est l'expression indépendante de i et B l'expression « collée » à la lettre i.

L'addition de deux nombres complexes $a+ib$ et $c+id$ donne le nombre complexe $(a+c)+i(b+d)$. La soustraction donne $(a - c) + i(b - d)$.

La multiplication de deux nombres complexes peut sembler plus mystérieuse. En fait elle renferme toute la richesse de ces nombres. Elle est définie comme suit : le produit de $a+ib$ et $c+id$, c'est le nombre $(a\times c-b\times d)+i(a\times d+b\times c)$.

Enfin, le quotient de $z=a+ib$ et $w=c+id$ est le nombre $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$. En d'autres termes, c'est le produit par le conjugué du second nombre, divisé par son module au carré (c'est le produit de w et $\bar{w}$).

1.1.2. Et les nombres réels dans tout ça

Un nombre réel a peut s'identifier au nombre complexe $a+ib$ avec $b=0$. En effet, les opérations précédentes sont un prolongement de leurs analogues réels. Par exemple, si x et y sont deux nombres réels alors :

$$x\times y=(x\times y-0\times 0)+i(x\times 0+0\times y).$$

1.1.3. Conclusion

On retiendra principalement que :

— on peut définir les nombres complexes directement à partir des nombres réels ;
— l'identité $i^2=-1$ provient de la définition du produit.

2. Quelle réalité pour les nombres complexes ?

S'il est aisé d'accepter la réalité des nombres réels, c'est parce qu'une simple règle graduée permet de les représenter. En effet, les nombres réels sont les points de la droite réelle, c'est-à-dire n'importe quelle droite avec une origine et une direction.

Mais les nombres complexes n'ont pas cette réalité physique immédiate. Il n'existe pas de règle permettant de mesurer un nombre complexe. Quel sens alors leur donner ?

À cela, on donne souvent deux axes de compréhension :

— leur existence est donnée par leur utilité dans la résolution d'équations algébriques, comme celles du troisième degré (voir le tutoriel précédemment cité sur la saga des nombres complexes) ;
— leur existence se justifie par une représentation géométrique : le nombre $a+ib$ s'apparente au point de coordonnées (a,b).

Mais à mes yeux ces deux axes présentent de sérieuses lacunes :

— si la résolution d'équations algébrique peut se faire avec des nombres complexes, les résultats que j'obtiens sont : ou bien réels et alors je n'en sais pas plus sur les nombres complexes, ou bien des nombres complexes et je retombe sur mon problème initial qui est que je ne sais pas ce *qu'est* un nombre complexe ;
— si faire le produit de deux nombres réels me donne une aire, mais que me donne alors le produit de deux points du plan ?

2.1. Un problème de forme

En 1821, le célèbre mathématicien français Cauchy écrit dans son *Cours d'Analyse* à l'Ecole Polytechnique, un chapitre dédié aux nombres complexes. Pour introduire ce chapitre, il écrit :

> En analyse, on appelle expression symbolique ou symbole toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même equations symboliques toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts, en modifiant et altérant selon des règles fixes ou ces équations elles-mêmes, ou les symboles qu'elles renferment. L'emploi des expressions ou équations symboliques est souvent un moyen de simplifier les calculs, et d'écrire sous une forme abrégée des résultats assez compliqués en apparence.

C'est bien là tout le problème identifié. Nous faisons face à des nombre *formels*, c'est-à-dire dont la seule description est donnée par ce que Cauchy appelle des « expressions symboliques ».

À mes yeux, tout le malaise entre mathématiciens et grand public se trouve ici. Le contrat tacite fixé entre les deux lors d'un échange diffère selon les rôles : le mathématicien peut se contenter d'une expression symbolique alors que le grand public désire un rapport au réel plus classique (la longueur mesurée par une règle, par exemple).

2.2. Du formalisme aux formes

Étudions rapidement l'étymologie du mot « formel » pour voir ce qu'il s'en dégage, et essayer de comprendre le point de vue des mathématiciens.

On y lit ici que ce mot :

— exprime le sens de. « précis, exact » ;
— est emprunté au latin *formalis* « qui a la forme de ».

C'est ce deuxième sens dont j'aimerais vous soumettre l'analyse. Il me semble que si le mathématicien n'a aucun mal à accepter des écritures formelles, c'est parce qu'il y voit la *forme* même des objets décrits.

2.2.1. Et les nombres complexes ?

Appliquons cela aux nombres complexes. Pour rappel, ce sont les expressions symboliques (terme emprunté à Cauchy) $a + ib$ où a et b désignent deux nombres réels. Ces expressions fournissent la description formelle des nombres complexes (en y comprenant la définition des opérations selon les usages).

Le malaise précédemment établi peut se décrire dans les termes suivants.

Malaise, première formulation : le mathématicien comprend les nombres complexes par leurs expressions formelles, le grand public non.

On a vu par une étude rapide du mot « formel » que le malaise pouvait se reformuler de la façon suivante.

Malaise, deuxième formulation : pour les mathématiciens, le formalisme donne la formes aux objets mathématiques, contrairement au grand public.

---

3. Quelle conclusion ?

Maintenant que nous avons bien cerné le problème, qu'en dire ? Je me permets ici de conclure mon article, alors qu'en fait il ne devrait en être qu'à l'introduction.

Il me semble que si l'on cherche profondément à comprendre la réalité des nombres complexes, elle réside dans leur écriture. J'ai introduit ici les nombres complexes comme étant des mots sur lesquels on pouvait faire des opérations, il me semble que l'on a là la nature même des nombres complexes : ce sont des mots.

Le formalisme donne de la forme aux objets plus qu'on ne le croit. Écrire les mathématiques ne consiste pas qu'à communiquer des opérations et des résultats, c'est aussi le moyen même avec lequel on décrit la réalité des objets mathématiques.

Est-ce que cela est décevant ? Peut-être un peu, mais c'est aussi une formidable façon de voir les mathématiques. On est jamais plus proches des objets que l'on écrit que s'ils sont leur écriture. D'une certaine manière, chercher la réalité des nombres complexes alors qu'on a une expression formelle, revient à chercher autre chose que leur réalité, puisque cette dernière est déjà sous nos yeux.

J'espère aussi que l'espace commentaire nous permettra d'échanger et d'approfondir certains points intentionnellement survolés. Bien à vous !

4. Références

Quelques références sur mon propos, et de manière plus générale sur les nombres complexes.

— Sur l'histoire des nombres complexes : *Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes : « Quelques commentaires épistémologiques et didactiques »*, M. Artigue et A. Deledicq, Cahier de Didirem ;

— Sur les difficultés des étudiants face au formalisme à l'université : *Contributions and limits of a specific course on manipulation of formal statements for fresh university students.*, S. Bridoux et V. Durand-Guerrier, CERME 9, Prague ;

— Sur l'enseignement des nombres complexes au secondaire : *Ces nombres que l'on dit « imaginaires »* et *Des nombres qui modélisent des transformations*, de H. Rosseel et M. Schneider, Petit x 63 et 64 ;

— Sur le formalisme chez Aristote (lien entre forme et formalisme) : *Initier les étudiants à la distinction entre vérité dans une interprétation et validité logique en s'appuyant sur la théorie du syllogisme formel d'Aristote*, de V. Durand-Guerrier, HPM Proceedings 2016, Montpellier.